www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

Concours des 21, 22 et 23 mai 1990 d'admission en 1ère année à l'INSTITUT NATIONAL DES TELECOMMUNICATIONS

MATHEMATIQUES
(Options M.P.)

***

On note C l'ensemble des fonctions à valeurs réelles continues sur $[0,1]$.

Pour toute fonction $f \in C$, on pose : $I_n(f) = \int_0^1 t^n f(t)\, dt$.

L'objet du problème est d'étudier la suite $(I_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ et certaines séries qui lui sont associées, la partie V spécialisant l'étude au sous-espace vectoriel $\mathcal{P}_N$ de C formé des fonctions polynômes de degré au plus N ($N \in \mathbb{N}$ fixé) .

I - Etude de la suite $(I_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$

1°) Montrer que cette suite converge vers 0 .

2°) On veut établir que $\lim_{n \to +\infty} n\, I_n(f) = f(1)$.

a) Soit $\alpha \in]0,1[$; montrer que $\lim_{n \to +\infty} n \int_0^\alpha t^n f(t)\, dt = 0$.

b) On suppose de plus que $f(1) = 0$; montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left| n \int_\alpha^1 t^n f(t)\, dt \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

En déduire que $\lim_{n \to +\infty} n\, I_n(f) = 0$.

c) Conclure dans le cas général (c'est-à-dire lorsque l'on ne fait plus l'hypothèse $f(1) = 0$) .

3°) Application : On prend $f(t) = e^{-t}$.

a) Calculer $I_n(f)$.

b) Déduire de l'étude précédente un équivalent de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

II - Etude de la série de terme général $[I_n(f)]^2$

1°) Montrer, en utilisant I-2°), que cette série converge.

On se propose dans la suite de cette partie de trouver un majorant de $\sum_{n=0}^{+\infty} [I_n(f)]^2$.

2°) P étant un polynôme à coefficients réels, vérifier l'égalité :

$$\int_{-1}^{+1} P(x)\, dx + i \int_{0}^{\pi} P(e^{i\theta})\, e^{i\theta}\, d\theta = 0 .$$

3°) Etablir alors les inégalités :

$$\int_0^1 [P(x)]^2 dx \leqslant \int_{-1}^{+1} [P(x)]^2 dx \leqslant \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} |P(e^{i\theta})|^2 \, d\theta .$$

(On pourra remarquer que $|P(e^{i\theta})|^2 = P(e^{i\theta})\, P(e^{-i\theta})$)

4°) En déduire que pour toute famille $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ de (n+1) réels

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{n} \sum_{\ell=0}^{n} \frac{a_k\, a_\ell}{k + \ell + 1} \leqslant \pi \sum_{k=0}^{n} a_k^2 .$$

5°) A l'aide de la question précédente et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux fonctions $f(t)$ et $g(t) = \sum_{k=0}^{n} I_k(f)\, t^k$,

montrer que pour toute $f \in C$: $\sum_{n=0}^{+\infty} [I_n(f)]^2 \leqslant \pi \int_0^1 [f(t)]^2 \, dt$.

III - Etude de la série de terme général $(-1)^n\, I_n(f)$

1°) On suppose, <u>dans cette seule question</u>, que pour tout $t \in [0,1]$, on a $f(t) \geqslant 0$.

Montrer que la série converge.

2°) f étant à nouveau un élément quelconque de C, montrer, en utilisant l'identité

$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, t^k + (-1)^{n+1} \frac{t^{n+1}}{1+t}$, que la série converge et que :

... /...

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \, I_n(f) = \int_0^1 \frac{f(t)}{1+t} \, dt \, .$$

3°) Première application : On suppose que $f(t) = 1$.

Déduire de l'étude précédente une expression simple de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$.

4°) Deuxième application : On suppose que $f(t) = \sqrt{t}$.

Déduire de l'étude précédente une expression simple de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

IV - Etude de la série de terme général $I_n(f)$

1°) Soit g une fonction à valeurs réelles, continue sur $[0,1[$ et telle que l'intégrale $\int_0^1 g(t)\,dt$ soit absolument convergente.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^1 t^n \, g(t) \, dt$ est absolument convergente. On pose alors $I_n(g) = \int_0^1 t^n \, g(t) \, dt$.

b) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \int_\alpha^1 t^n \, g(t) \, dt \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \, .$$

c) En déduire que $\lim_{n \to +\infty} I_n(g) = 0$.

2°) Soit $f \in C$ telle que l'intégrale $\int_0^1 \frac{f(t)}{1-t} \, dt$ soit absolument convergente.

Montrer qu'alors la série de terme général $I_n(f)$ converge et que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} I_n(f) = \int_0^1 \frac{f(t)}{1-t} \, dt \, .$$

TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

3°) Soit $f \in C$ telle que pour tout $t \in [0,1]$, on ait $f(t) \geqslant 0$.

Montrer qu'alors, si la série de terme général $I_n(f)$ converge, il en est de même de l'intégrale $\int_0^1 \frac{f(t)}{1-t}\,dt$, l'égalité de la question précédente étant de nouveau vérifiée.

V - Restriction de l'étude à $\mathcal{P}_N$ (voir introduction)

1°) Montrer que l'application $(P , Q) \mapsto (P \mid Q) = \int_0^1 P(t)\,Q(t)\,dt$, munit $\mathcal{P}_N$ d'une structure d'espace euclidien.

2°) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'application $I_k : P \mapsto I_k(P)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{P}_N$.

3°) Montrer que la famille $(I_k)_{0 \leqslant k \leqslant N}$ forme une base $\mathcal{B}$ du dual de $\mathcal{P}_N$.

4°) Ecrire la matrice de passage A de la base $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}$, où $\mathcal{B}_0$ est la base duale de la base canonique de $\mathcal{P}_N$.

5°) On considère l'application h qui, à tout $P \in \mathcal{P}_N$, fait correspondre h(P) défini par

$$[h(P)](t) = \sum_{k=0}^{N} I_k(P)\,t^k .$$

Montrer que h est un automorphisme de $\mathcal{P}_N$.

Quelle est la matrice de h dans la base canonique de $\mathcal{P}_N$?

6°) P et Q étant deux éléments de $\mathcal{P}_N$, calculer $(P \mid h(Q))$.

En déduire que la matrice A admet (en les comptant avec leur ordre de multiplicité) N+1 valeurs propres réelles strictement positives.

***

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail